剣持章行の「角術捷径」について (数学史の研究)

小林, 龍彦

数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 234-243

2001.8.27
第5回『数学史の研究』集会
京都大学数理解析研究所

剣持章行の「角術捷径」について*

前橋工科大学　共通教育
小林龍彦

1　はじめに

筆者は、昨年の第4回「数学史の研究」(2000.8.22)において、「角術への三角法の応用について」と題する発表をおこなった。これは、享保11(西暦1726)年に舶載された梅文鼎の遺著『暦算全書』(雍正元:西暦1723年刊)(1)や『暦象考成』(雍正元:西暦1723年刊)に載る三角法が、暦術や測量術のみならず、和算家の得意とする研究分野であった角術へ応用された実例を、上州吾妻郡三島の和算家丸橋東倭(天明3:1783-明治4:1871)の資料を基にして報告したものであった。そしてこの報告は、江戸の暦算家を中心に秘蔵していた西洋の三角法が、18世紀末から19世紀初頭にかけて地方の和算家に浸透してゆく様子を映し出す内容にもなっていた。

本論文は、既報の丸橋東倭の研究を踏まえながら、小野栄重の門弟として丸橋と席を共にしていた和算家剣持章行の写本「角術捷径」について詳報しようとするものである。

丸橋の角術では、正3角形から正10角形までの角面 a、角中径 R、平中径 r および某面斜 L を求めるために、三角比を用いて計算していたの対して、剣持の「角術捷径」では正 n 角形の各要素と面積 S を求めるにあたって、まずこれらの求長式と求積式を当時の和算家が既知としていた綴術（級数展開)で示した後、改めて三角関数による方法を例示することを特徴としている。

もっとも、剣持章行の「角術捷径」を取り上げようとすることは筆者を最初とするものではない。同書は『明治前日本数学史』第5巻においてその一部内容が紹介されている(2)。しかし、『明治前日本数学史』の著者藤原松三郎の記述は、剣持章行が三角法を角術へ応用しようとした彼の数学的意図を正確に描いているとは思えない。そこで本論文は、「角術捷径」を原文にそって忠実に解釈することで、剣持章行が「角術捷径」を著した目的を考察することにした。

---

*本研究は平成13年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))研究課題番号12680003によっておこなわれた一部を発表したものである。
(1)享保11年に長崎に舶載された『暦算全書』は、雍正2(1723)年版である。
(2)同書、pp.130-132。

2　剣持章行の生涯と業績

最初に、剣持章行の生涯と業績を簡単に紹介しておこう。和算家剣持章行(寛政 2:西暦 1790 年-明治 4:西暦 1871 年)は、通称を要七、または要七郎と言う。字は成紀、豫山と号し、任數堂とも名乗る。上州吾妻郡中之条町澤渡の農家に生れ、初めは同国安中板鼻の和算家小野栄重(宝暦 13:西暦 1763 年-天保 2:西暦 1831 年)に算学を学んだ。章行は農業と馬方を本業としたが、余暇には算学の研究に励み、文政 10(西暦 1827)年 2 月は師の栄重より見・隠・伏の三題免許を与えられた。章行 38 歳の時であった。天保 10(西暦 1839)年の 50 歳の時、内田五観(文化 2:西暦 1805 年-明治 15:西暦 1882 年)の主宰する瑪得瑪弟加(マテマテカ)塾に入門した。

また、壮年の頃より両毛、両総、常陸、武蔵の各地を遍歴して子弟の算学教育に意を注いだ。とくに、常総には多くの子弟が育ち、剣持が末永く遊歴を行う土地になっていた。明治 4 年 6 月 10 日、北総の鏑木（現千葉県香取郡古城村鏑木）において客死した。享年 82 歳であった。

和算の研究における剣持章行の業績を刊本から眺めると次のようになる。

(1)算法圓理冰釋上下 2 巻、天保 8（西暦 1837）年序。本書の扉は岩井重遠閲、山口言信著となっているが、実際の著者は剣持章行であることは明らか。

(2)探賾算法、上毛剣持要七章行著、丹州野村渡貞處訂、天保 11（西暦 1840）年序。

(3)算法開蘊 4 巻、上毛剣持要七章行著、嘉永元（西暦 1848）年序、同 2 年刊、任數堂蔵板。

(4)量地圓起方成上下 2 巻、嘉永 6（西暦 1853）年刊、任數堂蔵。

(5)検表相場寄算 2 巻、上毛剣持要七章行著、安政 3（西暦 1856）年刊。

(6)量地圓起方成後編、安政 2（西暦 1855）年刊。

(7)算法約術新編上中下 3 巻、文久 2（西暦 1862）年序。

これら和算書の刊行のほか、様々な問題の解義書や草稿類が多数残存している。今日、剣持の研究に関係する資料類のほとんどは日本学士院と東北大学付属図書館に保存されている。また、近年発掘された資料からは剣持が天文・暦学の研究にも手を染めていたことも明らかになりつつある。

3　「角術捷徑」について

さて、本論文の主題である「角術捷徑」の内容に移ることにしよう。なお、本論文で用いる写本「角術捷徑」は、東北大学付属図書館林文庫(蔵書登録番号:1058)に収蔵される剣持の直筆本であることを認めておこう。剣持直筆の「角術捷徑」は、表紙を含めて全丁数 20 葉。ただし、最終丁には“明野栄章 印 印 蔵書傳”と認められている。明野栄章(西暦 1834 年-西暦 1904 年)は、武州熊谷に住し、初めは剣持に師事して算学を学んだが、後には小野の門下生として剣持と同門であった中曽根慎吾(西暦 1824 年-西暦 1906 年)にも和算の手ほどきを受けた。剣持は遊歴の算家であったから、旅先で問題の解義を弟子たちに

示すことは常であった。ただ、剣持の晩年には、少なからずの写本が明野に渡ったと聞く。東北大学付属図書館に保管される「角術捷徑」も剣持から明野に伝えられた一冊であろう。

「角術捷徑」は表題が示すように、円に内接する正多角形の角面 a、角中径 R、平中径 r および某面斜 L などを迅速に求める方法について著したものである。角術に対する和算家の研究の起源は古く、これについての体系的な研究は関孝和(?-西暦 1708 年)を濫觴としよう。そして、関以後の和算家の角術への関心は薄れることなく、様々な研究書が著されることになる。剣持もこうした角術の研究経過を理解した上で「角術捷徑」を著したのである。

原本の内容に則して、第 1 丁から検討してゆこう。ただし、以下には「角術捷徑」の原文と筆者による解説の順序で記す。また、便宜的に問題の最初に番号を付した。

角術捷徑　　剣持章行　編

〔原文〕

①角數若干、角面若干、問得角中徑及平中徑術如何

答曰　依左術得角中徑及平中徑

術曰　以角數除圓周率為原數自之各率　置原数乗率二三除為一差乗率四五除為二差乗率六七除為三差如此求逐差併置原數偶差内併減奇差餘倍之以除面得角中径仍得平中径也

右　社盟算譜ヨリ脱出ス

円周率冪九ヶ八六九六〇四四〇有奇

〔問題の解説〕

いま、円に内接する正 n 角形がある。この正 n 角形の角数 n と一つの角面 a の長さを与えた時、正 n 角形に外接する円の半径 R（角中径のこと)および内接する円の半径 r（平中径のこと)を求める方法について述べよ。

〔答〕

つぎの方法によって、R と r を求めればよい。

〔術文〕

まず、正 n 角形の角数 n をもって円周率 π を除き、これを原数とおく。原数を自乗して各々の率とする。原数を置いて率を乗じ、これを 2 と 3 で除して一差とする。一差に率を乗じて 4 と 5 で除して二差とする。二差に率を乗じて 6 と 7 で除して三差とする。此の如く次々と各差を求めて、これらと原数と併せるのであるが、併せる式おいて、偶数の差は正、奇数の差は負の記号を取ることにする。そして、得られた式の全体を 2 倍し、これより角面 a を除けば角中径 R が得られる。また、平中径 r も得られる。

以上が、「角術捷徑」の最初の問題と答、術文およびそれに対する筆者の解説である。さて、角中径を求めるための術文をみよう。この術文では、まず、

$$原数=\frac{\pi}{n},\qquad 率=\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$$

とおき、つぎの漸化式から角中径 R を求めると言っている。つまり、

$$一差=\left(\frac{\pi}{n}\right)^3\frac{1}{2\cdot 3},\quad 二差=一差\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\frac{1}{4\cdot 5},\quad 三差=二差\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\frac{1}{6\cdot 7},\cdots$$

と逐次各差を求める。そして、それぞれの差において偶数の差は＋とし、奇数の差は－とするのであるから、これに従って R を求める式をつくれば、

$$R=\frac{a}{2\left\{\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{\pi}{n}\right)^5-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\left(\frac{\pi}{n}\right)^7+\cdots\right\}} \qquad (1)$$

となる。(1)が R を求める式である。

ところで（1)式は、

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} \qquad (2)$$

とする正弦関数の級数展開によって R を求めていることと全く等しい。

問題①に関して興味深いことは、剣持が問題の最後に、この術文は“社盟算譜ヨリ脱出”したものであると吐露していることであろう。その『社盟算譜』とは、文政 10(西暦 1827)年に“白石長忠編、池田貞一訂”として出版された白石門下の算額集である。剣持が『社盟算譜』から脱出したとわざわざ断るのであるから、第 1 問はこの算額集に掲載された問題からの引用であろうことの推測は付く。実際に『社盟算譜』を開いてみると、文政 8 年、関流宗統七傳池田貞一の門人 3 名が武州板橋駅愛染堂に奉納した算額の第 1 問の術文からの脱出であることが分かる(3)。そして、同問題の末尾には、下記に引用するような先人の和算書に著された角術が、邪術、あるいは用いるには足りないもの、また迂遠であると痛烈に批判すると共に、自分たちの先生である白石長忠の工夫した角術が最も優れていると誇示しているのである。曰く、

按凡角術雖載于諸書　然如角総算法、精要算法者邪術、而不足用、如括要算法、算法學海、古今通覧、點竄指南録者共迂遠也。先師鄭鄭白石先生所考定之角術最捷径、故用之左如。

と。

池田貞一が書いたであろうこの一文では、関流の元祖である関孝和を含め、藤田貞資、会田安明そして坂部廣胖らの錚々たる和算家が改良、工夫した角術を総て否定しているの

(3)同書、第 12 丁オ-13 丁オ。

である。このような挑発的とも思えるような先哲批判と他流派の指弾に続けて、白石一派の角術が載せられるのである。剣持が「角術捷徑」の冒頭の問題①において、敢えて『社盟算譜』からの引用であることを包み隠さなかったのは、池田貞一が展開した先哲非難とその数学的意味、さらには白石派の解法の捷径さを理解してのことであったと言うことになろう。ただし、剣持は白石長忠の別本「諸角通術捷法解」にも(1)の式が載っている[4]ことには気が付かなかったようである。

「角術捷徑」の解説に戻ろう。

②角數若干、角面若干、問積

答曰　依左術得積

術曰　置五差以角數冪除之加四差以角數冪除之加三差以角數冪除之加二差以角數冪除之加一差以減角數冪因原數餘乘面冪得積

〔問題の解説〕

いま、円に内接する正 n 角形がある。この正 n 角形の角数 n と角面 a の長さを与えた時、正 n 角形の面積 S を求める方法について述べよ。

〔答〕

つぎの方法によって S を求めればよい。

〔術文〕

問題①の漸化式において、原数＝A_0，一差＝A_1，二差＝A_2，三差＝A_3，四差＝A_4，五差＝A_5，…とおいて、次のように求めればよい。すなわち、

$$S=\left\{A_0n^2-\left(\left(\left(\left(\frac{A_5}{n^2}+A_4\right)\times\frac{1}{n^2}+A_3\right)\times\frac{1}{n^2}+A_2\right)\times\frac{1}{n^2}+A_1\right)\right\}\times a^2. \quad (3)$$

この(3)が面積 S を求めるための術文である。

いま（3）式を整理してみると、

$$S=a^2\left\{A_0n^2-A_1-\frac{A_2}{n^2}-\frac{A_3}{n^4}-\frac{A_4}{n^6}-\frac{A_5}{n^8}\right\} \quad (4)$$

となる。ここで(4)の各差を置き換えて、整理してみると、

$$S=a^2\times\frac{n}{4}\cos\frac{\pi}{n}:\sin\frac{\pi}{n} \quad (5)$$

を $1/n$ の級数に展開したものと等しいことが分かる。そして剣持は(3)を用いて、正7角形から正9角形について、一差から五差を用いて面積の値の精粗を検討している。

③角數若干、角中徑若干、問角面

答曰　依左術得角面

(4)日本学士院編：『明治前日本数学史』、第5巻、p.248。

術日　置五差以角數冪除之減四差余以角數冪除之以減三差余以角數冪除之以減二差余以角數冪除之以減一差余以角數冪除之以減原數余以角數冪除之乘角中径二段得角面

〔問題の解説〕

いま、円に内接する正 n 角形がある。この正 n 角形の角数 n と角中径 R を与えた時、角面 a の長さを求める方法について述べよ。

〔答〕

つぎの方法によって a を求めればよい。

〔術文〕

問題①で求められた漸化式を、原数＝A_0,　一差＝A_1,　二差＝A_2,　三差＝A_3,　四差＝A_4,　五差＝A_5,…とおいて、次のように求めればよい。すなわち、

$$a = 2R\left\{A_0 - \left(A_1 - \left(A_2 - \left(A_3 - \left(A_4 - \frac{A_5}{n^2}\right) \times \frac{1}{n^2}\right) \times \frac{1}{n^2}\right) \times \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{n^2}\right\}\frac{1}{n}. \tag{7}$$

この(7)式より角面 a が求まる。

問題②の場合と同様に、(7)についても整理してみると、

$$a = 2R\left\{\frac{A_0}{n} - \frac{A_1}{n^3} + \frac{A_2}{n^5} - \frac{A_3}{n^7} + \frac{A_4}{n^9} - \frac{A_5}{n^{11}}\right\} \tag{8}$$

となり、(8)は(1)の変形に過ぎないことが分かる。

これら(1)から(3)の式によって得られる数値例を示した後、剣持章行は“割圓八線表”を用いて正 n 角形の面積、角面、角中径および平中径を求める方法を示すのである。

以下、便宜的に問題ごとの番号を付した。

依割圓八線表求諸角之諸数

④求積

術日以角數除百八十度得弧度後求弧度者皆倣之　檢表求正弦余弦　以正弦除余弦乘角數四歸之得積率乘面冪得積

〔問題の解説〕

正 n 角形の面積を求めよ。

〔術文〕

いま、角数をもって 180 度を割れば、弧度を得る。以後の弧度を求める方法もすべてこれと同じである。三角関数表によって正弦値、余弦値を得て、これより正弦をもって余弦を除き、その商に角数を乗じて 4 で割れば、面積を求めるための積率が得られる。この積率に角面の自乗を乗ずれば正 n 角形の面積が求められる。

以上が問題④の求積問題の術文とその解説である。見て分かるように問題文は省略されていきなり術文が書かれているが、問題がなくても「求積」という見出しによって問題の主

旨は理解できる。いま、問題④の術文を現代的に書き換えると次のようになる。

弧度$=\theta=\dfrac{\pi}{n}$とおけば、これより$\sin\theta$, $\cos\theta$の値が求まる。よって面積Sは

$$S=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\times n\times\frac{1}{4}\times a^2. \tag{9}$$

この(9)式は先に述べた(5)式そのものであり、(4)の級数展開を関数表示したものと同じ意味となっている。

⑤求平中徑

術曰　如前術求弧度検表求正弦余弦　以倍正弦除餘弦乗面得平中径

〔問題の解説〕

正n角形の平中径rを求めよ。

〔術文〕

いま、問題④と同様に弧度を得て、三角関数表から正弦値、余弦値を求める。これより２倍の正弦をもって余弦を除き、その商に角面aを乗ずれば正n角形の平中径rが求められる。

問題⑤の術文は、

$$r=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}\times a \tag{10}$$

と書き表せ、比例からrを求めていることが分かる。故に、(１０)は角数nとこれに対応する角面a_nによってrが定まることも分かる。

⑥求角中徑

術曰　依前術求弧度検表求正弦　以除五分乗面得角中徑

〔問題の解説〕

正n角形の角中径Rを求めよ。

〔術文〕

いま、問題④と同様に弧度を得て、三角関数表から正弦値を求める。もって５分を除き、その商に角面を乗ずれば正n角形の角中径Rが求められる。

問題⑥の術文を書き換えれば、

$$R = \frac{a}{\sin\frac{\pi}{n}} \times \frac{1}{2} \qquad (1\ 1)$$

となる。これは(2)式そのものである。

⑦求二距斜

術曰　如前術求弧度検表求余弦　倍之乗面得二距斜

〔問題の解説〕

正 n 角形の最短の対角線である二距斜 L の長さを求めよ。

〔術文〕

いま、問題④と同様に弧度を得て、三角関数表から余弦値を求める。この値を 2 倍して角面を乗ずれば正 n 角形の二距斜 L が求められる。

問題⑦の術文は、

$$L = 2\cos\frac{\pi}{n} \times a \qquad (1\ 2)$$

となる。「角術捷徑」の問題⑦において、 正 n 角形の対角線として最短直線である二距斜 L の求長式が初めて取り上げられている。

⑧有角中徑求面

術曰　如前術求弧度検表求正弦　倍之乗角中徑得角面

〔問題の解説〕

正 n 角形の角中径 R が与えられた時の角面 a の長さを求めよ。

〔術文〕

いま、問題④と同様に弧度を得て、三角関数表から正弦値を求める。この値を 2 倍して角中径 R を乗ずれば角面 a が求まる。

問題⑧の術文は、

$$a = 2\sin\frac{\pi}{n} \times R \qquad (1\ 3)$$

で書き表される。そして、（1 3)式は(2)と(1 1)と同じである。

4 まとめ

以上の検討から、剣持章行がなぜ「角術捷徑」を著したのか、その著述意図がやや明らかになったと思われる。まず、剣持は本書の冒頭に、わざわざ白石一派の算額問題から問題と術文を引用した。確かに、剣持が「角術捷徑」を著した頃の角術研究の到達点として、白石の漸化式による級数展開はそれまでの和算家の結果と比較して画期的な方法であったのであろう。このことを剣持は認めたのである。であるからこそ、「角術捷徑」の冒頭に『社

盟算譜』の問題を掲げ、かつ術文もここからの脱出であることを隠さなかった。

しかし、実際の答を求める計算では、展開式の各項にそれぞれの数値を代入して計算せねばならず、しかも、最終的にはこれら各項の値を合計して所与の答としなければならなかった。実は、白石派が主張するほど(1)の式には捷径さはなかったのである。その証左は「角術捷徑」の問題ごとに各差（項）の数値計算を剣持が実行していることに見いだせる。ところが、割圓八線之表すなわち三角関数表を用いて計算すれば、白石派の展開式を使うよりも最も早く答が求まるのである。剣持はこのことに気が付いていた。故に、本書の書名を「角術捷徑」としたのであり、かつ問題の編集においては白石派の公式を述べた後に、より捷径な計算法として三角関数による公式を示したのである。三角関数の捷径さを示せば剣持に残される関心は、三角関数表の数値精度の問題に絞られることになろう。

ところで、剣持章行を含めたこの時期の和算家たちは、(1)式と(2)式が本質的に同じであることに気が付いていた節がある。筆者が最近入手した写本に、剣持と同じく内田五観の主宰する瑪得瑪弟加塾にいた法道寺善(西暦 1820 年-西暦 1868 年)の直筆本「量地密法三角八線術」がある。三角法による測量法を丁寧に解説した本書において、法道寺は“八線表ハ角度ヲ題シテ正弦ヲ求ルモノハ基ハ綴術式也”と指摘しているのである。ここでの法道寺の指摘はまさしく(1)式と(2)式が同一であると断言していることに他ならない。また、この一文において法道寺が“角度”という用語を使用していることも注目されよう。用語としての角度の使用例は剣持の『量地圓起方成』(嘉永 6:西暦 1853 年刊)の序文にも見えている。これらの事例および「角術捷徑」での三角関数法の使用法から推測すると、内田派における角度の考え方は完成の域に達していたと思えてくるのである。

最後に、剣持章行の「角術捷徑」で示された三角法が和算家によって使用される具体的な例を紹介してまとめの締めくくりとしよう。天保 11（西暦 1840）年、剣持は“瑪得瑪弟加塾蔵板”として『探賾算法』を刊行した。『探賾算法』は、この時期の和算家が熱心に研究した輪転曲線などの問題を含む高尚な数学問題集である。その内の後半部は“附録”として、内田門下生が奉納した算額を載せている。その 1 面に、天保 11 年、上州板鼻駅鷹巣山金比羅社に奉納された算額がある(5)。奉納者は、観齋内田先生門人上州碓氷郡新井村の岩井重賢となっている。4 問が掲載されるこの算額の第 1 問は、正 n 角形の周上を小円 c が右転しながら等速度で一周するとき、小円周上の点 p も右転しながら等速度で小円周上を一周する。このときの点 p の描く軌跡と軌跡によって囲まれる面積を求めよという問題である。そして、奉納者の岩井は、第 1 問の解答のために第 4 問に続けて、正 n 角形の角中径率と二距斜率を求めるには、(1 1)式と(1 2)式を用いよ(6)と公言しているのである。和算家が問題の解義に三角法を用いた例は極めて少ない。しかし、内田派における上述のような議論と算額での主張は、三角関数に対する彼らの自信を覗かせているのである。そして

(5)『探賾算法』、附録第 14 丁オ。
(6)『探賾算法』、附録第 16 丁ウ。

このことは、内田の門下では三角関数を用いて数学を考察することが一般的になり始めていたことを物語っていると言えるのである。